3.5 Násobné vlastné hodnoty

Nech λ_0 je vlastná hodnota matice A násobnosti μ.

Veta *Nech* $2 \le \mu \le n$. *Nech existuje systém lineárne nezávislých vektorov* $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$, $k \le \mu$, *s vlastnosťami*

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{r}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{i-1}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$i = 2,3,\ldots,k$. *Ak pre vektorové funkcie* $\mathbf{v}_s(t)$, $s = 1,2,\ldots,k$, *pre* $t \in (-\infty, \infty)$ *platí*

$$\mathbf{v}_s(t) = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\mathbf{r}_1 + \ldots + \frac{t}{1!}\mathbf{r}_{s-1} + \mathbf{r}_s, \tag{3.17}$$

potom vektorové funkcie

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{v}_s(t)e^{\lambda_0 t} = \left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\mathbf{r}_1 + \ldots + \frac{t}{1!}\mathbf{r}_{s-1} + \mathbf{r}_s \right) e^{\lambda_0 t}, \tag{3.18}$$

$s = 1,2,\ldots,k$, *sú lineárne nezávislými riešeniami systému* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, *kde* $\mathbf{u}_s(0) = \mathbf{r}_s$.

Vektor $\mathbf{r}_1$ definovaný pomocou (3.16), je samozrejmé vlastný vektor matice $\mathbf{A}$. Vektory $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$ (ak existujú?) sú **zovšeobecnené vlastné vektory.**

Príklad *Riešme systém diferenciálnych rovníc*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2, \\ x_2' &= x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Riešenie: Vyriešime charakteristickú rovnicu

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Vidíme, že $\lambda = 2$ je koreň násobnosti $n = 2$. Nech $\mathbf{r} = (\alpha, \beta)^T$ je odpovedajúci vlastný vektor. Vzhľadom na (3.16) dostávame

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha - \quad \beta &= 0, \\ \alpha + \quad (3-\lambda)\beta &= 0 \end{aligned}$$

a pre $\lambda = 2$ je

$$\alpha + \beta = 0.$$

Pre $\alpha = 1$, je $\beta = -1$. Potom vektor $\mathbf{r}_1 = (1,-1)^T$. Vzhľadom na (3.16) dostávame

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pre $\mathbf{r}_2 = (\alpha_2, \beta_2)^T$ je

$$-\alpha_2 - \beta_2 = 1,$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = -1$$

alebo $\alpha_2 + \beta_2 = -1$. Riešenie je napríklad $\alpha_2 = -1, \beta_2 = 0$, potom $\mathbf{r}_2 = (-1,0)^T$.

Vzhľadom na (3.17) a (3.18), dostávame

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1(t)e^{2t} = \mathbf{r}_1 e^{2t} = (1,-1)^T e^{2t},$$
$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2(t)e^{2t} = \left(\frac{t}{1!}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2\right)e^{2t} = (t-1,-t)^T e^{2t}.$$

Potom všeobecné riešenia daného systému je

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}e^{2t}.$$

Poznámka: *Riešenie* $\mathbf{u}_2(t)$ *môžeme nájsť aj iným spôsobom. Nech*

$$\mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}e^{2t}.$$

Substitúciou

$$x_1(t) = (at+b)e^{2t},\ x_2(t) = (ct+d)e^{2t},$$

dostávame systém rovníc

$$(at+a+b)e^{2t} = (at+b)e^{2t} - (ct+d)e^{2t},$$
$$(ct+c+d)e^{2t} = (at+b)e^{2t} + 3(ct+d)e^{2t}.$$

Riešenie je napríklad *a=1, b=-1, c=-1, d=0.*

Poznámka: *Keď použijeme:*

- *MAPLE, dostaneme fundamentálnu maticu nasledovným postupom:*

```
> with(DEtools):
A := matrix(2,2,[1,-1,1,3]):
U := matrixDE(A,t);
```

$$U = \begin{pmatrix} e^{(2t)} & e^{(2t)}t \\ -e^{(2t)} & -e^{(2t)}t - e^{(2t)} \end{pmatrix}$$

```
> with(DEtools):
A := matrix(2,2,[1,-1,1,3]);
U := matrixDE(A,t);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U := \left[\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(2t)} & \mathbf{e}^{(2t)}t \\ -\mathbf{e}^{(2t)} & -\mathbf{e}^{(2t)}t - \mathbf{e}^{(2t)} \end{bmatrix}, [0, 0] \right]$$

```
> riesenie:=matrix([[exp(2*t), exp(2*t)*t], [-exp(2*t), -
exp(2*t)*t-exp(2*t)]])*matrix(2,1,[C1,C2]);
```

$$riesenie := \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(2t)} & \mathbf{e}^{(2t)}t \\ -\mathbf{e}^{(2t)} & -\mathbf{e}^{(2t)}t - \mathbf{e}^{(2t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

- MATLAB, *dostaneme vlastné hodnoty a vlastné vektory nasledovným postupom:*

```
>>A=[1,-1;1,3]

A = 1    -1
    1     3
 >> [vlastné vektory, vlastné hodnoty]=eig(A)


vlastné vektory=      -0.7071    0.7071
                       0.7071   -0.7071

vlastné hodnoty =      2     0
                       0     2
```

- Priamo riešenie dostaneme pomocou MATLABu

```
>>syms x1 x2 t C1 C2
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=x1-x2, Dx2 =x1+3*x2')
 x1 =
exp(2*t)*(C1+C2*t)
 x2 =
-exp(2*t)*(C1+C2*t+C2)
```

- Exponenciál matice A môžeme nájsť takto:

```
>> syms  x1 x2 t
>> exponencialA=expm(A*t)

exponencialA =

[ exp(-6*t)*cos(t)-exp(-6*t)*sin(t),                exp(-6*t)*sin(t)]
[              -2*exp(-6*t)*sin(t), exp(-6*t)*cos(t)+exp(-6*t)*sin(t)]
```

Príklad *Nájdime riešenie systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Riešenie: Vlastná hodnota $\lambda_1 = 1$, matice $\mathbf{A}$, je násobnosti $n = 3$. Potom α, β, γ sú riešeniami rovnice

$$0.\alpha + 0.\beta + 0.\gamma = 0,$$

kde $\mathbf{r} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$. Dostávame, napríklad tieto tri lineárne nezávislé konštantné vlastné vektory

$$\mathbf{r}_1 = (1,0,0)^T,\ \mathbf{r}_2 = (0,1,0)^T,\ \mathbf{r}_3 = (0,0,1)^T.$$

Potom všeobecné riešenie daného systému je

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t .$$

Príklad Nájdime vlastné vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Vlastná hodnota $\lambda_1 = 1$, matice $\mathbf{A}$, je násobnosti $n = 3$. Potom α, β, γ sú riešeniami rovníc

$$\begin{aligned} 0.\alpha + 0.\beta + 0.\gamma &= 0, \\ 0.\alpha + 0.\beta + 1.\gamma &= 0, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{r} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$. Tentoraz máme iba dva lineárne nezávislé konštantné vlastné vektory. Sú to napríklad

$$\mathbf{r}_1 = (1,0,0)^T,\ \mathbf{r}_2 = (0,1,0)^T.$$

Poznámka: *Systém (3.16) môžeme zapísať tiež v tvare*

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})^i \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (i = 2,3,\ldots,k).$$

Príklad *Nájdime fundamentálnu maticu systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_2 + x_3, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Riešenie: $\lambda_1 = 1$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$ násobnosti $n = 3$. Potom $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$. Vzhľadom na (3.18), dostávame

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{v}_s(t)e^t = \left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\mathbf{r}_1 + \ldots + \frac{t}{1!}\mathbf{r}_{s-1} + \mathbf{r}_s \right) e^t \qquad \text{(s=1,2,3).}$$

Teda

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \ \mathbf{u}_2(t) = \left(\frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^t, \ \mathbf{u}_3(t) = \left(\frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t,$$

alebo

$$\mathbf{U}(t) = e^t \left[\mathbf{E} + t(\mathbf{A} - \mathbf{E}) + \frac{t^2}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^2 \right] \mathbf{r}_3, \ \ \mathbf{r}_3 = (1 \quad 1 \quad 1)^T.$$

Príklad *Nájdime riešenie systému* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *, kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Použijeme Cayley-Hamiltonovu metódu. Odpovedajúca charakteristická rovnica je

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

a jej korene sú $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Fundamentálny systém bude:

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = a_0(t)\mathbf{E} + a_1(t)\mathbf{A} + a_2(t)\mathbf{A}^2$$

kde $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ sú riešeniami systému rovníc:

$$\begin{aligned} e^0 &= a_0(t) + a_1(t)(0) + a_2(t)(0)^2, \\ e^t &= a_0(t) + a_1(t)(1) + a_2(t)(1)^2, \\ te^t &= a_1(t) + 2a_2(t)1^1. \end{aligned}$$

Riešením dostávame:

$$a_0(t) = 1, \quad a_1(t) = (2-t)e^t - 2, \quad a_2(t) = (t-1)e^t + 1.$$

Všeobecné riešenie je $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)^T$.